

[招待講演] 多カーネル適応フィルタが拓く無線通信技術の未来： 部分線形フィルタによる多ユーザ通信用ロバストシンボル検出法

湯川正裕[†]

[†] 慶應義塾大学理工学部電気情報工学科 〒223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1

あらまし 本稿では、部分線形適応フィルタに基づくシンボル検出法について、平易に解説する。多カーネル適応フィルタの一例である部分線形適応フィルタは、「線形フィルタ」と「カーネル適応フィルタ」を一体化させることで、双方の利点を活かした手法であり、線形カーネルと Gauss カーネル、それぞれに対応する再生核 Hilbert 空間の和空間の元として、特徴付けられる。同手法の最大の利点は、アンテナ本数を超えるユーザが同時に通信路へ接続した場合にも対応できることに加えて、環境変化（受信強度の変化など）に対してロバストであることである。さらに、不動点近似型適応アルゴリズムから導かれる並列射影アルゴリズムの利用により、動的な環境変化へ高速に追従することができる。これらのことから、massive Machine Type Communication (mMTC) など、移動体通信の様々なシーンにおいて、高精度なシンボル検出が実現されることを述べる。

キーワード 非線形適応フィルタ、部分線形モデル、再生核 Hilbert 空間、凸射影、MAP 受信フィルタ

[Invited Talk] Towards Future-Generation Wireless Communication Technology with Multikernel Adaptive Filter: Partially Linear Filter for Robust Multiuser Detection

Masahiro YUKAWA[†]

[†] Department of Electronics and Electrical Engineering Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8522

Abstract This review article presents a comprehensive overview of our recent developments for nonlinear multiuser detection using a partially linear filter which is a particular instance of the multikernel adaptive filter. The partially linear filter can be characterized as an element of the sum space of the reproducing kernel Hilbert spaces associated with the linear and Gaussian kernels. Taking advantages of the linear and nonlinear (Gaussian) components, the partially linear filter allows a larger number of users than the number of antennas to access the communication channels, and it is also robust to variations of environments, such as movements of mobile users. Moreover, it can track dynamic changes of environments quickly by employing the parallel projection method which is derived from the adaptive projected subgradient method (a unified framework for adaptive signal processing based on fixed point approximation). It is emphasized that highly accurate symbol detection will be realized by the presented method in a variety of scenes of mobile communication including massive Machine Type Communication (mMTC).

Key words nonlinear adaptive filter, partially linear model, reproducing kernel Hilbert space, convex projection, MAP receive filter

1. はじめに

Machine to Machine (M2M) 通信デバイス数のシェア拡大などにより、無線通信システムは、新しい局面を迎えると予想される。特に、massive Machine Type Communication (mMTC) のシナリオなどを考慮すると、多数のアンテナを搭載した無線

通信システムを構築した場合であっても、それを上回る数のユーザが同時に通信路へアクセスする状況が容易に想像される。線形フィルタに基づく従来のシンボル検出法は、アンテナ本数を超える数のユーザが通信路に同時接続する状況に対応できないため、ブレイクスルーを阻む大きなボトルネックとなることが予想される。

このような現状を鑑み、本稿では、非線形フィルタに基づくシンボル検出法 [1]~[3] について、平易に解説する。非線形手法に基づくシンボル検出法は、幾つか提案されてきた。その中でも、ニューラルネットワークに基づく手法は、30 年前に提案されている [4], [5]。また、深層学習に基づく最新の手法 [6], [7] は、付加的な情報（ユーザ数、通信路）が必要になることに加え、標準規格に基づく仮定が用いられているため、汎用性に欠ける。一方、ビームフォーミングへの非線形アプローチとして、再生核に基づく非線形手法が提案されている [8]。同手法は、アンテナ本数を超えるユーザ数に対応できる反面、送受信機間の距離変化などの要因で受信強度が大きく変わってしまうと、深刻な性能劣化を招く可能性が潜んでいる。なぜなら、同手法は、観測された受信ベクトルの近傍で非線形関数を推定していくが、受信ベクトルの存在領域が大きく変動し、推定された領域外に受信ベクトルが生じると、適切な推定結果を返せない可能性があるからである。これは、線形性の欠如に起因する内在的な問題点であり、線形フィルタに基づく従来アプローチは、このような状況において、比較的ロバストであることが知られている。

本稿で解説する部分線形適応フィルタは、「線形フィルタ」と「再生核に基づく非線形フィルタ」の双方の利点を活かす手法であり、多カーネル適応フィルタ [9]~[12] の一例である。その最大の魅力は、アンテナ本数を超えるユーザの同時接続に対応できて、さらに、受信強度の変化にロバストであることである。これに加えて、適応アルゴリズムによる更新により、動的な環境変化へ迅速に追従できるという利点もある。

次章では、多数ユーザの同時接続環境におけるシンボル検出問題について述べる。第 3 章では、まず部分線形モデルに基づく非線形フィルタを示し、それが再生核 Hilbert 空間の和空間の枠組みで自然に表現できることを述べるとともに、Hilbert 空間上で定式化された不動点近似型適応アルゴリズムの概要を記す。第 4 章では、まとめと展望を述べる。

【記法】実数全体の集合を $\mathbb{R}$ 、複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ 、非負整数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す。虚数単位を $i := \sqrt{-1}$ 、複素ベクトル（複素数）の実部と虚部をそれぞれ $\Re(\cdot)$ 、 $\Im(\cdot)$ で表す。ベクトルは小文字ボールド体、行列は大文字ボールド体で表記する。単位行列を $\mathbf{I}$ 、零行列を $\mathbf{O}$ 、零ベクトルを $\mathbf{0}$ で表す。行列とベクトルの転置と共役転置をそれぞれ $(\cdot)^\top$ 、 $(\cdot)^H$ で表す。実ベクトル $\mathbf{x}$ のユークリッドノルム $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$ ($\mathbf{x}$ が複素ベクトルの場合、 $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}$) を定義する。

2. 多ユーザ環境におけるシンボル検出

2.1 システムモデルと問題設定

K 台のユーザ端末から、 M 本のアンテナを搭載した基地局への上り回線を考える。時刻 t において、 k 番目のユーザの送信電力 $p_k(t) > 0$ 、変調シンボル $b_k(t) \in \mathbb{C}$ 、通信路ベクトル $\mathbf{h}_k(t) \in \mathbb{C}^M$ を定義すると、雑音ベクトル $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^M$ が重畳した受信信号は、

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k(t)} b_k(t) \mathbf{h}_k(t) + \mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^M \quad (1)$$

と書ける。コヒーレンスブロックと呼ばれる送信シンボルブロックに対して、ユーザ・基地局間の通信路は変化しない (Rayleigh ブロックフェージング通信路) とする。

これ以降、アナログ信号 $\mathbf{r}(t)$ 、 $b_k(t)$ の代わりに、離散化した

$\mathbf{r}_n$ 、 $b_{k,n}$ ($n \in \mathbb{N}$ は時刻を表すインデックス) を用いる。通信路と電力が一定である期間のみを考えるため、これらを p_k 、 $\mathbf{h}_k$ と表記する (k はユーザを表すインデックスであったことに注意)。一般性を欠くことなく、1 番目のユーザのシンボル $b_{1,n}$ を検出することを考える (他のユーザについても、同様の議論が可能である)。受信信号 $\mathbf{r}_n$ から送信シンボルの推定値を返す非線形フィルタ $f(\mathbf{r}_n) \approx b_{1,n}$ を見つけたい。ここで、非線形フィルタは、通信路に依存するため、通信路が一定であると仮定できるブロック長より短い期間で学習する必要がある。本稿では、「非線形適応フィルタ」を考えるため、所定の学習期間でデータを蓄えてから一括処理する従来方式と違い、受信信号 $\mathbf{r}_n$ を観測する度に適応フィルタを学習する。このため、学習期間を終えた後、遅延を生じることなく、シンボル検出を行うことができる。この特徴は、高データレート伝送を実現する上で、大きなメリットであると言える。

問題設定を整理しよう。まず、学習用データ (訓練データ) $b_{1,n}$ は、受信側で既知とする。この時、 $\mathbf{r}_n$ を順次、観測していく中、入力ベクトル $\mathbf{r}_n$ と所望出力 $b_{1,n}$ を用いて、時刻 n における非線形フィルタ f_n を更新し、推定誤差 $E(|b_{1,n} - f_n(\mathbf{r}_n)|^2)$ を減らしていくことが目的となる。基本的に、適応フィルタと同様の設定であるが、 f_n が非線形関数であるため、基底関数の設計が必要である点が、通常の線形適応フィルタと大きく異なる。この点については、第 3 章で詳しく議論する。

2.2 MAP 受信フィルタ

p 本節では、(符号化なし) ビット誤り率の意味で最適な多ユーザ検出法である MAP (最大事後確率) 受信フィルタを記す。雑音ベクトル $\mathbf{n}(t)$ がゼロ平均 $E(\mathbf{n}(t)) = \mathbf{0}$ 、共分散行列 $E(\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)) = 2\sigma_n^2 \mathbf{I}$ の加法的白色 Gauss 雑音 (AWGN) であると仮定する。簡単のため、BPSK 変調を考えると、 $\mathbf{b}(t) := [b_1(t), b_2(t), \dots, b_K(t)]^\top \in \{+1, -1\}^K$ が取り得るベクトルは、 2^K 通り存在する。これら 2^K 個のベクトルを $\mathbf{b}_q := [b_{q,1}, b_{q,2}, \dots, b_{q,K}]^\top$ ($q = 1, 2, \dots, 2^K$) と表し、それぞれに対応する「雑音を含まない」受信ベクトル $\bar{\mathbf{r}}_q := \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} b_{q,k} \mathbf{h}_k$ を定義する。すなわち、 $\mathcal{R} := \{\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \dots, \bar{\mathbf{r}}_{2^K}\}$ は、無雑音を仮定した場合に受信し得るベクトル全体の集合を表す。

以上の準備の下、MAP 受信フィルタは、

$$f^*(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^{2^K} b_{q,1} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_q\|^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{C}^M \quad (2)$$

で与えられる [13]。MAP 受信フィルタによる推定シンボル $\hat{b}_{1,n} \in \{+1, -1\}$ は、 $f^*(\mathbf{r}_n) \geq 0$ の時、 $\hat{b}_{1,n} = +1$ 、それ以外の時、 $\hat{b}_{1,n} = -1$ で与えられる。

2.3 前処理

第 3 章で扱うシンボル検出は、実ベクトルを対象とする。このため、 $\mathbb{C}^M$ から $\mathbb{R}^{2M}$ への写像によって、 $\mathbf{r}_n$ を $2M$ 次元実ベクトルに変換する前処理について説明する。線形フィルタ $\mathbf{w} := \mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I \in \mathbb{C}^M$ ($\mathbf{w}_R, \mathbf{w}_I \in \mathbb{R}^M$) を考えよう。複素ベクトル $\mathbf{w}$ を、一対一対応 $\mathbb{C}^M \ni \mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I \mapsto [\mathbf{w}_R^\top \mathbf{w}_I^\top]^\top =: \tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{2M}$ により、同一の情報を含む実ベクトル $\tilde{\mathbf{w}}$ に変換する。この時、フィルタ出力に対応する実ベクトルは、

$$\mathbf{w}^H \mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{w}^H \mathbf{r}_n) \\ \Im(\mathbf{w}^H \mathbf{r}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{r}_n)^\top & \Im(\mathbf{r}_n)^\top \\ \Im(\mathbf{r}_n)^\top & -\Re(\mathbf{r}_n)^\top \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_R \\ \mathbf{w}_I \end{bmatrix}}_{=\tilde{\mathbf{w}}} \quad (3)$$

と表現できる。式 (3) は、 $\mathbf{w}^H \mathbf{r}_n = b_{1,n}$ という複素ベクトルによる単一の線形方程式が、実ベクトルによる二つの線形方程式 $(\mathbf{r}_n^{(1)})^\top \tilde{\mathbf{w}} = \Re(b_{1,n})$, $(\mathbf{r}_n^{(2)})^\top \tilde{\mathbf{w}} = \Im(b_{1,n})$ として表現されることを意味している。ここで、 $\mathbf{r}_n^{(1)} := [\Re(\mathbf{r}_n)^\top \Im(\mathbf{r}_n)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2M}$, $\mathbf{r}_n^{(2)} := [\Im(\mathbf{r}_n)^\top - \Re(\mathbf{r}_n)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2M}$ と定義した（さらに詳しい説明は、[8], [14] を参照）。

上記より、 $\mathbf{r}_n$ を実ベクトル空間で処理する場合、実質的に $(\mathbf{r}_n^{(1)}, \Re(b_{1,n}))$ と $(\mathbf{r}_n^{(2)}, \Im(b_{1,n}))$ を入出力と考えれば良いことが分かる。そこで、実ベクトル $\mathbf{r}_n^{(1)} \in \mathbb{R}^{2M}$, $\mathbf{r}_n^{(2)} \in \mathbb{R}^{2M}$ を順番に並べた点列を $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2M}$ と置く。すなわち、 $\mathbf{y}_0 := \mathbf{r}_0^{(1)}$, $\mathbf{y}_1 := \mathbf{r}_0^{(2)}$, $\mathbf{y}_2 := \mathbf{r}_1^{(1)}$, $\mathbf{y}_3 := \mathbf{r}_1^{(2)}$, $\mathbf{y}_4 := \mathbf{r}_2^{(1)}$, $\mathbf{y}_5 := \mathbf{r}_2^{(2)} \dots$ である。同様に、 $\Re(b_{1,n}) \in \mathbb{R}$, $\Im(b_{1,n}) \in \mathbb{R}$ を順番に並べた実数列を $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ と表す。第3章では、この表記に基づき、非線形適応フィルタについて説明する。

2.4 広域線形モデルへの拡張について

線形フィルタ $\mathbf{w}$ の平均二乗誤差は、通常、 $E(|b_{1,n} - \mathbf{w}^H \mathbf{r}_n|^2)$ で定義される。この考え方は、実ベクトルの自然な拡張として、広く受け入れられている。この定義では、右辺を展開して得られる $\mathbf{r}_n$ の共分散行列 $\mathbf{C} := E(\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^H)$ が用いられていることになる。一方、行列 $\mathbf{P} := E(\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^\top)$ は、擬似共分散行列と呼ばれ、 $\mathbf{P} \neq \mathbf{O}$ の時、ベクトル $\mathbf{r}_n$ は noncircular であるという [15]。この場合、受信ベクトル $\mathbf{r}_n$ のみを用いる代わりに、その複素共役 $\bar{\mathbf{r}}_n$ も用いて定義される長さ $2M$ の複素ベクトル $\mathbf{r}_n^{\text{aug}} := [\mathbf{r}_n^\top \bar{\mathbf{r}}_n^\top]^\top \in \mathbb{C}^{2M}$ を用いた広域線形 (Widely Linear) モデルを用いるアプローチが有用である [16], [17]。二倍の長さを持つ受信ベクトル $\mathbf{r}_n^{\text{aug}}$ の自己相関行列のブロック主対角成分に現れる擬似共分散行列 $\mathbf{P}$ の働きにより、通常の線形モデルと比べて、推定誤差が減少することが知られている。第3章で述べる手法を、広域線形モデルに拡張することは容易である。本稿では、これ以上、議論しないので、興味のある読者は、参考文献を参照されたい。

3. 多カーネル適応フィルタに基づくシンボル検出法：部分線形フィルタによるロバスト化

3.1 部分線形モデル

入力ベクトル $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^{2M}$ から所望出力 $s_n \in \mathbb{R}$ の推定値を出力する非線形フィルタ

$$f_n(\mathbf{y}_n) := \underbrace{f_{L,n}(\mathbf{y}_n)}_{\text{線形成分}} + \underbrace{f_{G,n}(\mathbf{y}_n)}_{\text{非線形成分}} \quad (\text{部分線形フィルタ}) \quad (4)$$

を定義する^(注1)。ここで、線形成分は、適応フィルタ $\mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^{2M}$ を用いて、

$$f_{L,n}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{w}_n^\top \mathbf{y}_n \quad (5)$$

と表現できる。一方、非線形成分は、点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_D \in \mathbb{R}^{2M}$ を中心とする Gauss 関数

$$\kappa_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{y}) := \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2M} \quad (\sigma > 0) \quad (6)$$

(注1)：入力ベクトル $\mathbf{z}_n \in \mathbb{C}^N$ ($\mathbf{y}_n$ とは異なる) に関する非線形関数 $f: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ を考える。この時、 $s_n = \mathbf{w}^\top \mathbf{y}_n + f(\mathbf{z}_n) + \varepsilon_n$ で与えられる非線形モデルを、一般に、部分線形モデル (partially linear model) という [18]。本研究で暗に仮定しているモデルは、 $\mathbf{z}_n := \mathbf{y}_n$ ($N := M$) となる特別な場合に相当する。部分線形モデルに関連する初期の研究例として、1986 年に Engle, Granger, Rice, Weiss によって発表された論文 [19] などが挙げられる。再生核を用いた部分線形モデルの研究例として、[20], [21] を挙げておく。

とそれらの係数 $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \dots, \alpha_{D,n} \in \mathbb{R}$ を用いて、

$$f_{G,n}(\mathbf{y}_n) = \sum_{j=1}^D \alpha_{j,n} \kappa_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{y}_n) = \boldsymbol{\alpha}_n^\top \mathbf{k}_n \quad (7)$$

と表現できる。ここで、 $\boldsymbol{\alpha}_n := [\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \dots, \alpha_{D,n}]^\top$, $\mathbf{k}_n := [\kappa_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}_n), \kappa_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{y}_n), \dots, \kappa_{\mathbf{x}_D}(\mathbf{y}_n)]^\top$ と置いた。このように表現することで、式 (4) は、

$$f_n(\mathbf{y}_n) = \underbrace{[\mathbf{w}_n^\top \boldsymbol{\alpha}_n^\top]}_{=: \mathbf{h}_n^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{k}_n \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{u}_n} = \mathbf{h}_n^\top \mathbf{u}_n \quad (8)$$

と書ける。これは、入力ベクトル $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^{2M+D}$ に対する適応フィルタ $\mathbf{h}_n \in \mathbb{R}^{2M+D}$ に他ならない。したがって、原理的には、これに対して、適応アルゴリズム [22] を適用すれば良い。

3.2 注意点

部分線形モデルを使用するにあたり、幾つか注意が必要である。

1. 重み係数： 実際には、 $\beta f_{L,n} + (1 - \beta) f_{G,n}$ のように適切な重み $\beta \in (0, 1)$ を与える必要がある。これは、一般に、線形成分の入力ベクトル $\mathbf{y}_n$ と非線形成分の入力ベクトル $\mathbf{k}_n$ の大きさ（ノルム）に不均衡が生じうるのである。例えば、 $\mathbf{y}_n$ に対して $\mathbf{k}_n$ が支配的であると、線形フィルタの係数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_n$ の収束速度が低下し、極端な場合、非線形フィルタのみで学習した場合と変わらなくなってしまう（逆の状況も起こりうる）。別の見方をすれば、自己相関行列の固有値広がりが多いことによる収束速度の劣化が、ブロック単位（線形ブロック $E(\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^\top)$ と非線形ブロック $E(\mathbf{k}_n \mathbf{k}_n^\top)$) で生じると言うこともできる。

ベクトル $\mathbf{y}_n$ と $\mathbf{k}_n$ をそれぞれ正規化することで、ある程度の改善は見込めるが、時刻 n によって正規化定数を変えてしまうと対応する $\mathbf{w}_n$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ の意味が変わってしまうので、注意が必要である。本稿ではこれ以上、触れないが、文献 [23] で詳しく論じるとともに、重みの自動設計法を与えているので、興味のある読者は参照されたい。

2. 辞書の生成： 非線形成分 $f_{G,n}$ を表現するために用いる関数の集合 $\{\kappa_{\mathbf{x}_j}\}_{j=1}^D$ を辞書と呼ぶ^(注2)。一般に、Gauss 関数の中心点 $\mathbf{x}_j$ を事前に決定するのは困難である。なぜなら、 $\mathbf{x}_j$ は、受信ベクトル $\mathbf{y}_n$ の発生する領域内に取ることが望ましいが、この領域を事前に特定しておくことは容易でない。実際、雑音の影響を無視するとしても、 $\mathbf{y}_n$ の発生する領域内は、(変調方式に加えて) 送信電力 p_k 、通信路ベクトル $\mathbf{h}_k$ に依存する。ここで、 p_k と $\mathbf{h}_k$ は、一般に未知であり、また、時間変化し得ることも忘れてはいけない。

以上の理由より、入ってくる受信ベクトルを順次、辞書に加えていく方法、すなわち、 $\mathbf{x}_1 := \mathbf{y}_0$, $\mathbf{x}_2 := \mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_3 := \mathbf{y}_2$, $\dots$ とするのが基本的である。しかし、この方法を採用した場合、辞書の要素数（辞書サイズ） D が時間とともに線形的に増加してしまうため、適当なサイズになるよう制御したい。そこで、既に辞書に入っている要素との類似性を測る「新規性基準（例：コサイン類似度）」を用いて、選択的に辞書を構築することで、

(注2)：基底と似た役割を果たすが、必ずしも一次独立性でなくてもよい。ウェーブレット解析に代表されるように、スパース表現を得るために、あえて冗長な辞書を用いることも少なくない。

辞書をスパース化する方法が一般的である [24]。

3. 所望解への単調接近性： 辞書サイズ D (あるいは、辞書そのもの) が時変であるという事実焦点を当てる。つまり、係数ベクトル $\mathbf{h}_n$ の次数は、時刻 n に依存した $2M + D_n$ という形で考える必要がある。この点は、線形適応フィルタと大きく異なる点である。この時、適応アルゴリズム (3.6 節) によって非線形適応フィルタが更新されていく様子を眺めた時、所望解 (MAP 受信フィルタ f^* 、またはその近似解) へ単調に近づいていくことが保証できるだろうか。この問いについて議論しようとした時、フィルタ $\mathbf{h}_n$ の次元が変わっていくため、固定された次元のユークリッド空間で考えることはできない。この問題は、再生核 Hilbert 空間を考えることで、解消される。辞書が変わっても、非線形フィルタは、常にある再生核 Hilbert 空間上の点として扱えるため、単調性を議論することが可能となる。これについて、次節以降、詳しく述べたい。

3.3 再生核 Hilbert 空間

非線形信号処理・非線形データ解析で広く用いられる関数

$$\kappa_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2M} \quad (9)$$

は Gauss カーネルと呼ばれる。3.1 節で定義した関数 $\mathbf{k}_{x_j}(\mathbf{y})$ との間に、関係式 $\mathbf{k}_{x_j}(\mathbf{y}) = \kappa_G(\mathbf{x}_j, \mathbf{y})$ が成り立つ。両者の違いは、 $\mathbf{x}_j$ を明示的に固定しているか、引数の一つとして表現しているかという点である。関数 κ_G において、 $\mathbf{x}_j$ を固定して考えていることを明示する時、 $\kappa_G(\mathbf{x}_j, \cdot)$ という表記を用いるのが一般的である。ここで、第二引数 $\mathbf{y}$ の位置に書かれた $(\cdot)$ は、その位置のベクトルを変数として扱うという意思表示である。

ある集合 $S \subset \mathbb{R}^{2M}$ 上から $\mathbf{x}_j$ を好きな数だけ (有限個) ピックアップし、対応する関数 $\kappa_G(\mathbf{x}_j, \cdot)$ の線形結合を考える。このようにして定義される関数で生成される空間に、その要素からなる点列の「極限」を新しい要素として追加することで、Hilbert 空間^(注3)

$$\mathcal{H}_G := \overline{\text{span}\{\kappa_G(\mathbf{x}, \cdot) \mid \mathbf{x} \in S\}} \quad (10)$$

を定義することができる。空間 $\mathcal{H}_G$ は、周波数領域で指数関数的に減衰する関数全体に一致する。正確には、フーリエ変換領域で指数関数的に増加する重み関数によって定義される測度 μ を考えると、 $\mathcal{H}_G$ は、 μ に関する二乗可積分関数全体^(注4) に一致する [25], [26]。この測度 μ から定義される内積^(注5) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_G}$ において、以下の重要な性質が成り立つ。

- (a) $\kappa_G(\mathbf{x}, \cdot) \in \mathcal{H}_G, \forall \mathbf{x} \in S$
- (b) $\langle f, \kappa_G(\mathbf{x}, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}_G} = f(\mathbf{x}), \forall f \in \mathcal{H}_G, \forall \mathbf{x} \in S$

(注3) : $\overline{}$ は、距離空間 X の完備化を表す。完備化とは、「極限」を追加する操作に相当する。ここで、極限は考える空間内に存在する必要があるため、極限となる点を追加する前に極限と呼ぶのは不正確であるが、直感的な理解のため、「極限」という表現を使用しているので、容赦いただきたい。少し誤魔化しているが、距離 (位相) が決まらなると極限の概念が決まらないので、正確に理解したい読者は、この後に定義する内積から誘導されるノルムから定義される距離で極限が定義されると理解されたい。

(注4) : これは、通常の二乗可積分関数で定義される $L^2(S, d\mu)$ 空間の部分集合となっており、 $\mathcal{H}_G = \{f \in L^2(S, d\mu) \mid \int_S f^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) < +\infty\}$ が $\mathcal{H}_G$ の正体である。

(注5) : $f, g \in \mathcal{H}_G$ の内積は、 $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_G} := \int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$ で定義される。ここで、Cauchy-Schwarz の不等式より、 $|\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_G}| \leq \sqrt{\int_S f^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})} \sqrt{\int_S g^2(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})} < +\infty$ が成り立つことに注意されたい。

性質 (b) を再生性といい、(a), (b) を満たす関数 κ_G を Hilbert 空間 $(\mathcal{H}_G, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_G})$ の再生核という。再生核が存在する空間を再生核 Hilbert 空間という。つまり、式 (9) で定義した関数 κ_G は、 $(\mathcal{H}_G, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_G})$ の再生核になっている。再生核 Hilbert 空間について興味のある読者は、本稿に関係する部分についての平易な解説 [26] があるので、是非、ご参考いただきたい (数学書 [27] やカーネル法に関する専門書 [25] も紹介しておく)。

以上の準備の下、非線形成分は、 $f_{G,n} \in \mathcal{H}_G$ のようにモデル化できる^(注6)。また、線形成分については、 $f_x(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ の形で表現できる一次関数からなるベクトル空間に内積 $\langle f_x, f_y \rangle_{\mathcal{H}_L} := \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ を入れた Hilbert 空間 $\mathcal{H}_L$ の再生核が、線形カーネル

$$\kappa_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^\top \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2M} \quad (11)$$

で与えられる。 $\mathcal{H}_L$ は $2M$ 次元ベクトル空間であり、標準基底 $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{2M}$ に対応する正規直交基底^(注7) $\{f_{e_j}\}_{j=1}^{2M}$ を用いれば、式 (5) は、

$$f_{L,n}(\mathbf{y}_n) = \left(\sum_{j=1}^{2M} w_{n,j} f_{e_j} \right) (\mathbf{y}_n) \quad (12)$$

と表現することができる。ここで、 $w_{n,j}$ は、 $\mathbf{w}_n$ の第 j 成分を表す。すなわち、 $\mathcal{H}_L$ の辞書については、Gauss カーネルの場合と違い、固定の辞書 (基底) $\{f_{e_j}\}_{j=1}^{2M}$ を利用できる。

3.4 パラメータ σ の設計

AWGN 通信路を仮定した場合の MAP 受信フィルタ f^* の定義域 $S \subset \mathbb{R}^{2M}$ が内点を持つ場合、 $\sigma < \sqrt{2}\sigma_n$ を満たすように、Gauss カーネルのパラメータ σ を選べば、 $f^* \in \mathcal{H}_G$ となることが知られている [28]。したがって、雑音の分散が既知であれば、MAP 受信フィルタを含む再生核 Hilbert 空間を使用することができる。しかし、実用上、 $f^* \in \mathcal{H}_G$ が成立するだけでは不十分であり、 f^* の近似解^(注8) を表現するために必要な辞書サイズ (展開の長さ) が、 σ に強く依存する点に、注意を払う必要がある。

上記の理由から、交差検定を用いて σ を設計するのが一般的である (その際、 σ_n が推定できていれば、一つの目安になる)。しかし、(i) 交差検定に用いるデータセットを十分に準備できるとは限らないことに加えて、(ii) AWGN 通信路の仮定が成り立たない状況も想定されるため、「MAP 受信フィルタ (所望解) が単一の周波数成分のみを含み、さらに、その周波数が時間変化しない」という保証はない。特に、屋外の移動体通信では、環境が動的に変化するため、それに伴って、所望解も動的に変

(注6) : MAP 受信フィルタとのつながり (3.4 節) を考えると、AWGN 通信路の場合、Gauss カーネルを用いるのは自然と言える。また、Gauss カーネルに対応する $\mathcal{H}_G$ は、滑らかな関数の表現に適しており、コンパクト集合上の連続関数の空間 C_0 に上限ノルムで距離を入れた距離空間で稠密である (普遍性) など、理論的な裏付けも与えられている ([26] で解説しているので、ご参考いただきたい)。しかし、AWGN 通信路を仮定しない場合、Gauss カーネルに固執する必要はない。他にも、スプラインカーネルや多項式カーネルなど、状況に応じて、選択の余地が残されている。

(注7) : 実際、 $\langle f_{e_j}, f_{e_l} \rangle_{\mathcal{H}_L} = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{e}_l = \delta_{j,l}$ ($\delta_{j,l}$: クロネッカーのデルタ) が成立し、 $\{f_{e_j}\}_{j=1}^{2M}$ は $\mathcal{H}_L$ の正規直交基底になっている。

(注8) : $f_{G,n} = f^*$ を実現するためには、 $\sigma = \sigma_n$ とし、さらに、辞書を $\mathcal{D}_n = \{\kappa_G(\bar{\mathbf{r}}_q, \cdot)\}_{q=1}^{2K}$ に一致させる必要がある。これには、電力 p_k と通信路 $\mathbf{h}_k$ の正確な情報が必要であり、特に、屋外における移動体通信などを想定した場合、非現実的である。したがって、 $f^* \in \mathcal{H}_G$ であっても、一般に、近似解を求めていくことになる。

化していくことを想定する必要がある。このことは、もし仮に、データセットを準備できたとしても、それを利用して得られた σ を使用する時には、有用性が低下している可能性があることを示唆する。

筆者は、複数の Gauss 関数を用いる非線形関数推定パラダイム「多カーネル適応フィルタ」を提唱している [9], [10]（解説 [11], [12] を参照されたい）。正確には、複数の再生核を用いるアプローチであり、再生核は Gauss 関数である必要はない。3.1 節で与えたモデルは、線形カーネルと Gauss カーネルを採用した多カーネル適応フィルタとして定式化することが可能である（3.6 節）。これ以降の議論では、簡単のため、適切な σ が得られているものと仮定する。

3.5 和空間

式 (4) に示す関数は、3.3 節で説明した二つの再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_L$ と $\mathcal{H}_G$ の元の和からなる和空間の元として特徴付けられる。この点を詳述する上で、以下の事実は有用である。

- 内点を持つ部分集合 $S \subset \mathbb{R}^{2M}$ 上で定義される Gauss カーネル κ_G に対して、対応する再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_G$ には、いかなる多項式も（零関数でない定数関数さえも）含まれない [28]。したがって、一次関数（多項式の特別な場合）からなる $\mathcal{H}_L$ に対して、 $\mathcal{H}_G \cap \mathcal{H}_L = \{0\}$ が成り立つ。ここで、受信ベクトル $\mathbf{y}_n$ ($\mathbf{r}_n$) は、雑音の影響でゆらぐため、「内点を持つ」という仮定は妥当である。この時、対応 $(f_L, n, f_G, n) \mapsto f_L, n + f_G, n$ は単射であり、関数 $f_L, n + f_G, n$ から $\mathcal{H}_L$ と $\mathcal{H}_G$ の元に一意的に分解できる。つまり、 $f_L, n, \tilde{f}_L, n \in \mathcal{H}_L$, $f_G, n, \tilde{f}_G, n \in \mathcal{H}_G$ に対して、等価性 $f_L, n + f_G, n = \tilde{f}_L, n + \tilde{f}_G, n \Leftrightarrow f_L, n = \tilde{f}_L, n, f_G, n = \tilde{f}_G, n$ が成り立つ。この時、和空間

$$\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_G := \{f + g \mid f \in \mathcal{H}_L, g \in \mathcal{H}_G\} \quad (13)$$

を、特に、**直和**という（記号 $\oplus$ は、直和であることを表す）。直和空間の二つの元 $f_1 + g_1, f_2 + g_2 \in \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_G$ ($f_1, f_2 \in \mathcal{H}_L$, $g_1, g_2 \in \mathcal{H}_G$) の内積

$$\langle f_1 + g_1, f_2 + g_2 \rangle_{\oplus} := \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}_L} + \langle g_1, g_2 \rangle_{\mathcal{H}_G} \quad (14)$$

を定義すると、 $\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_G$ は、再生核 $\kappa_{\oplus} := \kappa_L + \kappa_G$ を持つ再生核 Hilbert 空間となる。次節で、直和空間 $\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_G$ に構築された適応アルゴリズムの概要を記す。

3.6 適応アルゴリズムの概要

適応劣勾配射影法 [29] に基づく並列射影型アルゴリズムを説明する。理想的には、 $f(\mathbf{y}_n) = \langle f, \kappa_{\oplus}(\mathbf{y}_n, \cdot) \rangle_{\oplus} = s_n$ となる $f \in \mathcal{H}_{\oplus}$ を見つけたい。しかし、雑音の影響があるので、これは非現実的である。そこで、所望解を高い確率で含む集合

$$C_n := \{h \in \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_G \mid |\langle h, \kappa_{\oplus}(\mathbf{y}_n, \cdot) \rangle_{\oplus} - s_n| \leq \epsilon\} \quad (15)$$

を定義する。ここで、 $\epsilon > 0$ は誤差の上界を表す。MAP 受信フィルタ f^* の出力は、 s_n （または、それに近いもの）になるはずであるから、上界 ϵ を適切に選ぶことで、各時刻 n において、高い確率で $f^* \in C_n$ となることが期待される。そこで、 $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ が共通部分を持つと仮定し、共通点 $g^* \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_j$ を求めていくことが目標となる。（雑音ベクトルのランダム性により、MAP 受信フィルタ f^* が全ての C_j に所属する保証はないため、一般に、 $g^* \neq f^*$ である。）

共通点を求めていく際の基本アイデアは、各集合 C_n への射影を並列計算し、その凸結合を取る**並列射影**の利用である。全

ての $C_0, C_1, \dots, C_n$ を使用し続けるのは、計算量やメモリ容量の観点から非効率であるため、（予め定めた個数の）直近のデータのみを用いる。ここで、一つ注意が必要である。部分線形フィルタ $f_n = f_{L,n} + f_{G,n} \in \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_G$ の非線形成分 $f_{G,n}$ は、実際には、辞書で生成される部分空間 $\mathcal{H}_{G,n} := \text{span } \mathcal{D}_n \subset \mathcal{H}_G$ の元である。ここで、辞書 $\mathcal{D}_n \subset \{\kappa_G(\mathbf{y}_j, \cdot)\}_{j=0}^n$ は、3.2 節で述べたように、新規性基準に基づいて、オンラインで構築されていく。時刻 n における部分線形フィルタ f_n から各集合 C_j への射影 $P_{C_j}(f_n)$ は、 $\kappa_{\oplus} = \kappa_L + \kappa_G$ に注意すると、

$$\begin{aligned} P_{C_j}(f_n) &= f_n + \beta_j^{(n)} \kappa_{\oplus}(\mathbf{y}_j, \cdot) \\ &= f_n + \beta_j^{(n)} \kappa_L(\mathbf{y}_j, \cdot) + \beta_j^{(n)} \kappa_G(\mathbf{y}_j, \cdot) \end{aligned} \quad (16)$$

という形で書ける（ $\beta_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ は、出力誤差を用いて簡単に計算できる定数である）。しかし、このままだと、 $\kappa_G(\mathbf{y}_j, \cdot)$ が辞書に含まれない場合、射影 $P_{C_j}(f_n)$ が辞書で表現できないベクトルになってしまう（つまり、 $\kappa_G(\mathbf{y}_j, \cdot) \notin \mathcal{D}_n \Rightarrow P_{C_j}(f_n) \notin \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_{G,n}$ ）。この問題を回避するため、 $\kappa_G(\mathbf{y}_j, \cdot)$ の代わりに、 $\mathcal{H}_{G,n}$ への射影 $P_{\mathcal{H}_{G,n}}(\kappa_G(\mathbf{y}_j, \cdot))$ を用いる。この操作は、射影の凸結合 $\sum_{j \in \mathcal{J}_n} q_j^{(n)} P_{C_j}(f_n)$ 部分空間 $\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_{G,n}$ へ射影することと一致する。ここで、 $\mathcal{J}_n$ は、時刻 n で用いる集合 C_j のインデックス集合であり、 $q_j^{(n)} > 0$ は、 $\sum_{j \in \mathcal{J}_n} q_j^{(n)} = 1$ を満たす凸結合係数である。以上をまとめると、部分線形適応フィルタの更新式は、

$$f_{n+1} = P_{\mathcal{H}_n} \left(\sum_{j \in \mathcal{J}_n} q_j^{(n)} P_{C_j}(f_n) \right) \quad (17)$$

で与えられる。

本節では、アルゴリズムの概要を述べた。詳細については、[1]~[3] を参照されたい（直和空間におけるアルゴリズムは、[11], [12] でも解説している）。適応劣勾配射影法の動作原理となっている不動近似の考え方は、[22], [30], [31] に解説されているので、興味のある読者は参考されたい。

4. ま と め

本稿では、多カーネル適応フィルタの応用例として、部分線形モデルに基づくシンボル検出法を紹介した。部分線形フィルタは、線形カーネルと Gauss カーネル、それぞれに対応する再生核 Hilbert 空間の和空間の元として与えられる。このため、同フィルタの更新は、Hilbert 空間上で定式化された不動点近似型適応アルゴリズム（適応射影劣勾配法）で扱うことができる。提案法は、アンテナ本数を超える数のユーザの同時接続に対応できる（Gauss カーネルの恩恵）だけでなく、受信強度が大きく変化した場合にも、大きな性能劣化を招かず、ロバストな振る舞いをすることが実証されている（線形カーネルの恩恵）。さらに、並列射影に基づく適応アルゴリズムを用いることで、動的な環境変化に高速に追従できる点などから、未来の無線通信技術の可能性を大きく広げる役割を演じていくものと予想される。本稿で述べた手法の詳細やシミュレーション実験等については、IEEE ICC 2018 で発表した国際会議論文 [1] や機械学習を用いた無線通信技術に関する研究を纏めた書籍（編者: Fa-Long Luo 教授、米ワシントン大学）に掲載された論文 [2] をご参照いただきたい。

本稿で記した内容は、筆者が Fraunhofer Heinrich Hertz 研究所 (Fraunhofer HHI) と実施した国際共同研究成果に基づ

いており、幸いにも、国際的に大きな反響があった。例えば、2020年の米 NVIDIA 社による発表 [32] では、GPU を用いた機械学習ベースの移動体通信システムにおいて、本稿で記した並列射影に基づく手法の有用性が紹介されている。本技術は、Fraunhofer Heinrich Hertz 研究所内でハードウェア実装され [33]、信号処理分野のフラグシップカンファレンス IEEE ICASSP 2020 にてデモンストレーションが実施された^(注9)。最後に、本稿で記した素朴なアイデアが、将来の無線通信技術に多少なりとも貢献できれば本望である。

謝 辞

本研究は、科研費の助成（22H01492）によった。

文 献

- [1] D. A. Awan, R. L. G. Cavalcante, M. Yukawa, and S. Stańczak, “Detection for 5G-NOMA: An online adaptive machine learning approach,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, May 2018.
- [2] —, *Adaptive Learning for Symbol Detection: A Reproducing Kernel Hilbert Space Approach*. in Machine Learning for Future Wireless Communications, Wiley, 2020, ch. 11, pp. 197–211.
- [3] —, “Robust online multiuser detection: A hybrid model-data driven approach,” 2022, submitted for publication.
- [4] B. Aazhang, B. Paris, and G. C. Orsak, “Neural networks for multiuser detection in code-division multiple-access communications,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 40, no. 7, pp. 1212–1222, July 1992.
- [5] Y. Isik and T. Necmi, “Multiuser detection with neural network and PIC in CDMA systems for AWGN and Rayleigh fading asynchronous channels,” *Wireless Personal Communications*, vol. 43, no. 4, pp. 1185–1194, Dec. 2007.
- [6] Narengerile and J. Thompson, “Deep learning for signal detection in non-orthogonal multiple access wireless systems,” in *UK/China Emerging Technologies (UCET)*, 2019, pp. 1–4.
- [7] A. Emir, F. Kara, H. Kaya, and H. Yanikomeroglu, “Deep-MuD: Multiuser detection for uplink grant-free NOMA IoT networks via deep learning,” *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 10, no. 5, pp. 1133–1137, 2021.
- [8] K. Slavakis, S. Theodoridis, and I. Yamada, “Adaptive constrained learning in reproducing kernel Hilbert spaces: the robust beamforming case,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 12, pp. 4744–4764, Dec. 2009.
- [9] M. Yukawa, “Multikernel adaptive filtering,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 9, pp. 4672–4682, Sept. 2012.
- [10] —, “Adaptive learning in Cartesian product of reproducing kernel Hilbert spaces,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 22, pp. 6037–6048, Nov. 2015.
- [11] 湯川正裕, “多カーネル適応フィルタ：信号処理と機械学習,” in *信学技報*, vol. 116, no. 477, Mar. 2017, pp. 177–182, SP2016-108 (招待講演) .
- [12] —, “連載講座—非線形適応信号処理への凸解析的アプローチ—第五回：非線形適応フィルタと応用：再生核と不動点近似型アルゴリズムの出会い,” *日本音響学会誌*, vol. 78, 2022.
- [13] S. Chen, L. Hanzo, and A. Wolfgang, “Nonlinear multi-antenna detection methods,” *EURASIP J. Advances in Signal Process.*, vol. 2004, no. 9, pp. 1225–1237, Aug. 2004.
- [14] M. Yukawa, Y. Sung, and G. Lee, “Dual-domain adaptive beamformer under linearly and quadratically constrained minimum variance,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 61, no. 11, pp. 2874–2886, 2013.
- [15] D. P. Mandic and V. S. L. Goh, *Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters Noncircularity: Widely Linear and Neural Models*. Wiley, 2009.
- [16] P. Chevalier and A. Blin, “Widely linear MVDR beamformers for the reception of an unknown signal corrupted by noncircular interferences,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 55, no. 11, pp. 5323–5336, 2007.
- [17] M. Yukawa and Y. Saito, “Widely linear LQCMV beamformer and augmented dual-domain adaptive algorithm,” in *Proc. Int. Conf. Inform., Commun. and Signal Process.*, 2013, pp. 1–5.
- [18] W. Härdle, H. Liang, and J. Gao, *Partially Linear Models*. Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 2000.
- [19] R. F. Engle, C. W. J. Granger, J. Rice, and A. Weiss, “Semiparametric estimates of the relation between weather and electricity sales,” *J. American Statistical Association*, vol. 81, pp. 310–320, 1986.
- [20] M. Espinoza, J. A. K. Suykens, and B. D. Moor, “Kernel based partially linear models and nonlinear identification,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 10, pp. 1602–1606, Oct. 2005.
- [21] Y.-L. Xu and D.-R. Chen, “Partially-linear least-squares regularized regression for system identification,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 54, no. 11, pp. 2637–2641, Nov. 2009.
- [22] 湯川正裕, “連載講座—非線形適応信号処理への凸解析的アプローチ—第三回：不動点近似型適応アルゴリズムと応用,” *日本音響学会誌*, vol. 78, 2022.
- [23] K. Jeong and M. Yukawa, “Kernel weights for equalizing kernel-wise convergence rates of multikernel adaptive filtering,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E104-A, no. 6, pp. 927–939, June 2021.
- [24] 湯川正裕, “非線形適応信号処理技術の新潮流：再生核の応用,” *電子情報通信学会誌*, vol. 97, no. 10, pp. 876–882, 2014.
- [25] 福水健次, *カーネル法入門*. 朝倉出版, 2010.
- [26] 湯川正裕, “連載講座—非線形適応信号処理への凸解析的アプローチ—第四回：再生核に基づく非線形数値モデル,” *日本音響学会誌*, vol. 78, 2022.
- [27] 斎藤三郎, *再生核の理論入門*. 牧野書店, 2002.
- [28] H. Q. Minh, “Some properties of Gaussian reproducing kernel Hilbert spaces and their implications for function approximation and learning theory,” *Constr. Approx.*, vol. 32, no. 2, pp. 307–338, Oct. 2010.
- [29] I. Yamada and N. Ogura, “Adaptive projected subgradient method for asymptotic minimization of sequence of non-negative convex functions,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 25, no. 7&8, pp. 593–617, 2004.
- [30] 山田功, “凸射影と適応フィルタリングの親密な関係：はらべこ JAWS から学ぶ理想的な信号処理,” *日本音響学会誌*, vol. 63, no. 10, pp. 600–605, 2007.
- [31] 湯川正裕, “連載講座—非線形適応信号処理への凸解析的アプローチ—第二回：凸解析に基づく信号処理への招待,” *日本音響学会誌*, vol. 78, 2022.
- [32] A. Keller, “Machine learning on the edge for 5G,” in *GPU Technology Conference*, 2020, available at: <https://developer.nvidia.com/gtc/2020/video/s22144>.
- [33] M. Mehlhose, D. A. Awan, R. L. G. Cavalcante, M. Kurras, and S. Stańczak, “Machine learning-based adaptive receive filtering: proof-of-concept on an SDR platform,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, June 2020.

(注9) : <https://ieeetv.ieee.org/ondemand/ieee-icassp-2020-virtual-conference-may-2020/6986/machine-learningbased-adaptive-receive-filtering-proofofconcept-onsdr-platform>